Equations différentielles

1-Introduction

2-Equations différentielles linéaires d'ordre 1

3-Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

4-Problème de Cauchy

5-Schéma d'Euler

Introduction (Equations différentielles)

La modélisation mathématique des phénomènes du monde réel passe très souvent par l'écriture d'une équation différentielle, qui décrit les variations de la quantité que l'on veut étudier en fonction d'un paramètre. C'est encore une fois Isaac Newton qui a le premier écrit et étudié des équations différentielles. Son principe fondamental de la dynamique s'écrit par exemple

$$mx''(t) = F(x(t)),$$

où $t \longrightarrow x(t)$ décrit la trajectoire du centre de gravité d'un objet de masse m, soumis au champ de force $x \longrightarrow F(x)$. Il est d'ailleurs clair que pour connaître la position x(t) de l'objet à l'instant t, il faut connaître non seulement la règle qui gouverne les variations de cette fonction, mais aussi la position et la vitesse initiale du centre de masse. Dans le cas d'un objet se déplaçant verticalement sous l'action de l'attraction terrestre, supposée constante dans la région où le mouvement à lieu, et compte tenu de la résistance de l'air, l'équation différentielle ci-dessus s'écrit

$$mx''(t) = -kx'(t) + mg,$$

Où k, g sont des constantes. Un autre exemple célèbre est celui du pendule : une masse m est suspendue à l'extremité d'une corde de longueur ` dont l'autre extrémité est fixe. L'angle θ(t) que fait, à l'instant t, le fil avec la verticale vérifie la relation

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution que l'on puisse exprimer simplement avec des fonctions connues. Il faut avoir à l'esprit que c'est le cas de la plupart des équations différentielles, même si les exercices proposés aux étudiants consistent souvent à trouver une solution explicite - c'est plus facile ! L'étude qualitative d'une équation différentielle consiste à décrire certaines propriétés des solutions sans les calculer, mais nous ne pratiquerons pas ce sport ici.

On trouve des équations différentielles dans tous les domaines de la physique. Par exemple la charge électrique q(t) d'un condensateur dans un circuit RLC (résistance-bobine-condensateur), alimentée par une source de courant alternatif, doit vérifier l'équation

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = U\cos(\omega t).$$

La biologie est aussi une source importante d'équations différentielles. La modélisation des systèmes prédateurs-proies, due à Volterra, est particulièrement éclairante. Au niveau de ce cours, on peut aussi penser à l'évolution d'une population de bactéries : on peut être amené à penser que le taux de croissance de leur nombre est proportionnel à ce nombre. Celui-ci est alors décrit par l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t),$$

Où k est une constante, que l'on pourra ajuster de sorte que la solution de l'équation coïncide au mieux avec les données expérimentales. Signalons enfin que les mathématiques elles-mêmes peuvent être source d'équations différentielles. Si l'on cherche les fonctions dérivables y telles que $y(a + b) = y(a)y(b)$ pour tous réels

a, b, on arrive très vite à l'équation $y' = ky$ où $k = y'(0)$. Il est d'ailleurs important de noter

que résoudre l'équation

$$y' = f(x, y),$$

C'est trouver les courbes (x, y(x)) dont le vecteur tangent au point d'abscisse x est (1, f(x, y(x))).

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

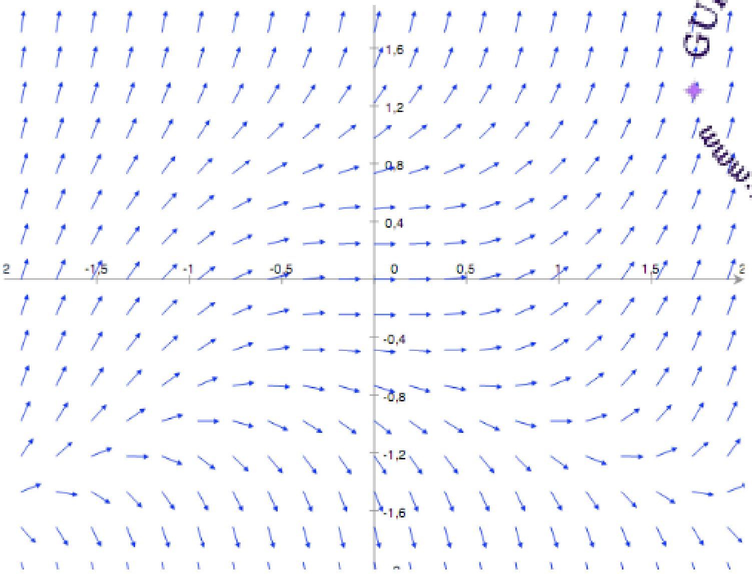

FIGURE – Le champ de vecteurs $f(x, y) = (1, x^2 + y^3)$

Il est temps de préciser ce qu'on entend par "résoudre une équation différentielle". On l'écrit pour les équations d'ordre 1.

<u>Définition</u>: *Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit*

$$(ED1)\ y' = F(t, y),$$

Où F est une fonction continue sur I × U, I et U étant deux intervalles de R. On dit que le couple (J, y), constitué d'un intervalle J ⊂ I et d'une fonction y définie, continue et dérivable sur J, est une solution de l'équation lorsque
1. pour tout t ∈ J, on a y(t) ∈ U.
2. pour tout t ∈ J, on a y'(t) = F(t, y'(t)).

On est bien sûr obliger de vérifier la condition (1) pour que la condition (2) ait un sens.

On verra des plus loin des exemples où il n'existe pas de solution pour lesquelles J = I.

Autrement dit, en général, même si la fonction F est "gentille" sur IR × IR, on ne peut pas espérer avoir de solution de l'équation (ED1) sur R tout entier.

Pour fixer les idées, on va étudier un type particulier d'équations différentielles, les équations linéaires. Dans le cas des équations d'ordre 1, on peut écrire les solutions à partir de fonctions que vous connaissez. C'est aussi le cas pour les équations d'ordre 2 à coefficients constants, mais on rappelle encore une fois que ce n'est pas le cas en général.

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère dans cette section pour commencer les équations différentielles de la forme

$$(EDL1) \qquad y' = a(t)y + b(t),$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I \subset R$. Ce sont des équations du type (ED), d'ordre 1, avec F définie sur $I \times \mathbb{R}$ par $F(t, y) = a(t)y + b(t)$. Dans ce cas particulier, la condition (1) ci-dessus est donc automatiquement vérifiée !

Notant H la partie de H qui dépend de y, ici $H(t, y) = a(t)y$, on voit facilement que H est linéaire par rapport à la variable y :

$$Ht, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 H(t, y_1) + \lambda_2 H(t, y_2),$$

pour tous $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et tous $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On parle donc d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Nous allons voir que pour ce type d'équations, il est possible d'exprimer toutes les solutions à l'aide d'intégrales et de fonctions connues. **Attention !** Il ne faut surtout pas croire que c'est le cas de toutes les équations différentielles...

1- Le principe de superposition:

Proposition *Soit (J, y_1) une solution de l'équation (EDL1). Toute solution (J, y_2) de (EDL1) s'écrit $y_2 = y_1 + z$, où z est solution sur J de l'équation différentielle homogène associée :*

$$(H) \qquad z' = a(t)z.$$

Preuve: Pour tout $t \in J$, on a $(y_1)'(t) = a(t)y_1(t) + b(t)$ et $(y_2)'(t) = a(t)y_2(t) + b(t)$. On a donc, par soustraction

$$(y_2)'(t) - (y_1)'(t) = a(t)(y_2(x) - y_1(x)),$$

et, posant $z = y_2 - y_1$, il suffit de remarquer que $z' = (y_2 - y_1)' = (y_2)' - (y_1)'$.

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

Autrement dit, pour trouver **TOUTES** les solutions de (EDL1), il suffit de
- trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée ;
- trouver **UNE** solution de (EDL1).

2- *Solutions de l'équation homogène associée*

Proposition *Soit a une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation*

$$(H) \qquad z' = a(x)z$$

sur I est

$$S_H = \{z : t \mapsto Ce^{A(t)},\ C \in \mathbb{R}\},$$

où $A(t)$ est une primitive de la fonction a sur I.

Remarque *Dans le cas de l'équation (H), on peut donc trouver des solutions sur tout l'intervalle I. On parle de solutions globales.*

Preuve: Il est d'abord très simple de vérifier que pour n'importe quel C, la fonction $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie l'équation.
Soit maintenant (I, z) une solution de l'équation. La fonction $w : t \mapsto e^{A(t)}z(t)$ est constante sur l'intervalle I : en effet, pour tout $t \in I$, on a

$$w'(t) = e^{-A(t)}z'(tx) - a(t)e^{-A(t)}z(t) = e^{-A(t)}(z'(t) - a(t)z(t)) = 0.$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $w(t) = C$, ou encore $z(t) = Ce^{A(t)}$.

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

On peut se demander comment l'on a deviné la forme des solutions. Une façon de procéder est de raisonner par condition nécessaire : si (I, z) est une solution de l'équation, on doit avoir, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = a(t)z(t).$$

On est alors bien sûr tenté de diviser les deux membres de cette égalité par $z(t)$, mais il faut pour cela faire l'hypothèse que $z(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Compte tenu du résultat qui précède, ce n'est pas un réel problème : les solutions de l'équation homogène $z' = a(t)z$ ne s'annulent jamais, sauf s'il s'agit de la fonction constante nulle ($C = 0$).

Continuons donc, en supposant que z ne s'annule jamais sur I : on arrive à

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t),$$

et en intégrant chacun des membres de cette égalité,

$$\ln|z(t)| - \ln|z(t_0)| = \int_{t_0}^{x} a(s)ds = A(t).$$

On a donc

$$|z(t)| = Ke^{A(t)},$$

où $K = e^{\ln|z(t_0)|} = |z(t_0)|$ est une constante strictement positive. On doit donc avoir $z(t) = \epsilon(t)Ke^{A(t)}$, où $\epsilon(t) = \pm 1$. Mais puisque z doit être continue, la fonction ϵ est nécessairement contante sur I, et l'on obtient bien $z(t) = Ce^{A(t)}$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

3- *Recherche d'une solution : variation de la constante*

Dans ce paragraphe, on donne une méthode qui permet toujours de trouver une solution. Il est important de comprendre que dans la circonstance présente, tous les moyens sont bon ! Par exemple, il est très simple de trouver une solution de l'équation $y' = 1$, et employer la méthode de variation de la constante dans ce cas est très exagéré...

L'idée est la suivante : on cherche une solution (I, y) de (EDL1) sous la forme

$$y(t) = C(t)e^{A(t)},$$

où C est une fonction $\mathcal{C}^1$ à déterminer, et $A(t)$ est une primitive de a comme ci-dessus. De manière un peu rapide, on dit que l'on fait varier la constante C qui apparaît dans l'expression de la solution de l'équation homogène (H) associée à (EDL1).

Pour que cette fonction soit une solution, il faut et il suffit que

$$C'(t)e^{A(t)} + a(t)C(t)e^{A(t)} = y'(t) = a(t)y(t) + b(t) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

et il suffit donc de prendre pour $C(t)$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, c'est-à-dire

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds,$$

où $t_0 \in I$ est un point quelconque.

4- *L'ensemble des solutions*

Au total, on a trouvé toutes les solutions sur I de l'équation (EDL1), et l'on a montré la

> **Proposition** *Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation*
>
> $$y' = a(t)y + b(t)$$
>
> *est*
>
> $$\mathcal{S} = \left\{(I, y),\ y : t \mapsto e^{A(t)}(C + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds), C \in \mathbb{R}\right\},$$
>
> *où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur I, et t_0 un point quelconque de I.*

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation différentielle qui s'écrit

(EDL2) y''+ p(x)y'+ q(x)y = f(x)

Pour certaines fonctions p, q et f continues sur un intervalle I de IR. On ne va ici considérer que le cas où p et q sont des fonctions constantes, car dans ce cas, et dans ce cas uniquement, on est capable de donner l'ensemble des solutions comme dans le cas des équations linéaires d'ordre 1.

1- *Principe de superposition :*

Cette équation étant linéaire, on a aussi le principe de superposition :

> **Proposition** *Soit (J, y_1) une solution de l'équation (EDL2). Toute solution (J, y_2) de (EDL2) s'écrit $y_2 = y_1 + z$, où z est solution sur J de l'équation différentielle homogène associée :*
>
> (H) $$z'' + pz' + qz = 0.$$

On laisse au lecteur le soin de prouver cette proposition. Comme pour les équations linéaires d'ordre 1, on voit que pour trouver TOUTES les solutions de (EDL2), il suffit de

– trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée – trouver UNE solution de (EDL2).

On ne donnera pas ici de méthode générale pour trouver une solution de (EDL2). Une telle méthode existe (c'est aussi une méthode de variation des constantes), mais est plus difficile à mettre en œuvre. On se contente de donner les solutions de l'équation homogène (H) associée.

2- *Equations homogènes*

On cherche les solutions de l'équation

(H) $$z'' + pz' + qz = 0,$$

où p et q sont des nombres réels fixés.

L'idée de départ consiste à chercher des solutions de (H) de la forme $z : t \mapsto e^{rt}$ pour un certain nombre r. En calculant z' et z'' pour cette fonction, on voit que c'est une solution si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique associée à (H) :

$(*)$ $$r^2 + pr + q = 0.$$

On peut alors démontrer la

Proposition *Soit $\Delta = p^2 - 4q$ le discriminant de l'équation caractéristique (*) associée à (H).*

1. *Si $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$S_H = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ sont les racines de (*).
2. *Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$S_H = \{t \mapsto e^{r_0 t}(C_1 t + C_2),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $r_0 \in \mathbb{R}$ est la racine de (*).
3. *Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$S_H = \{t \mapsto e^{-pt/2}(C_1 \cos(\delta t) + C_2 \sin(\delta t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $\delta \in \mathbb{R}^+$ vérifie $\delta^2 = -\Delta$.

Preuve: • On commence par le cas où $\Delta = 0$. Soit $z(t)$ une solution de (H). On pose $w(t) = e^{-r_0 t} z(t) = e^{pt/2} z(t)$. On a

$$w'(t) = \frac{p}{2} e^{pt/2} z(t) + e^{pt/2} z'(t)$$
$$w''(t) = \frac{p^2}{4} e^{pt/2} z(t) + p e^{pt/2} z'(t) + e^{pt/2} z''(t) = e^{pt/2}(qz + pz' + z'') = 0.$$

Donc $w(t) = C_1 t + C_2$ pour certains réels C_1, C_2, et $z(t)$ est de la forme annoncée. Réciproquement, toutes les fonctions de cette forme sont des solutions de (H), ce qui prouve la proposition dans ce cas.

• Considérons maintenant le cas où $\Delta > 0$. Soit $z(t)$ une solution de (H). Notant $r_1 = \frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}$, on pose $w(t) = e^{-r_1 t} z(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= r_1 e^{-r_1} z(t) + e^{-r_1 t} z'(t) \\ w''(t) &= (r_1)^2 e^{-r_1} z(t) - 2r_1 e^{-r_1 t} z'(t) + e^{-r_1 t} z''(t) \\ &= [(r_1)^2 - q] e^{-r_1} z(t) - [2r_1 + p] e^{-r_1 t} z'(t), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $z'' = -pz' - qz$. Un calcul simple montre que

$$(r_1)^2 - q = -pr_1 - 2q = -r_1 \sqrt{\Delta} \text{ et } 2r_1 + p = -\sqrt{\Delta}.$$

On a donc

$$w''(t) = \sqrt{\Delta}[-r_1 e^{-r_1} z(t) + e^{-r_1 t} z'(t)] = \sqrt{\Delta}\, w'(t).$$

Posant $v = w'$, on a $v' = \sqrt{\Delta} v$, donc $v(t) = Ae^{\sqrt{\Delta}t}$, et on en déduit que

$$w(t) = C_2 e^{\sqrt{\Delta}t} + C_1,$$

pour certains réels C_1, C_2. Du coup

$$z(t) = C_2 e^{\sqrt{\Delta}t} e^{r_1 t} + C_1 e^{-r_1 t} = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

comme annoncé. Réciproquement, toutes les fonctions de cette forme vérifient (H), et on a terminé la preuve de la proposition dans le cas $\Delta > 0$.

• On admet le résultat dans le cas $\Delta < 0$.

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

Problème de Cauchy (Equations différentielles)

On vient de le voir, une équation différentielle a en général beaucoup de solutions, même si l'on ne s'intéresse qu'aux solutions maximales. D'un autre côté, on a vu par exemple que la trajectoire M(t) d'un point matériel au cours du temps est complètement déterminé par l'équation de Newton (une équation différentielle d'ordre 2), à condition de préciser la position et la vitesse initiale du point. Ceci conduit à la notion de problème de Cauchy pour l'équation différentielle (ED), pour lequel on espère avoir une solution unique.

Définition Soit F une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $U \times \mathcal{D}$, où U est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in U$. On appelle problème de Cauchy (en x_0) pour l'équation différentielle

$$(ED) \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

la recherche des solutions de (ED) vérifiant la condition initiale

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

où $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ est fixé dans $\mathcal{D}$.

L'exemple suivant montre que la situation n'est pas aussi simple qu'on pourrait le souhaiter : il arrive qu'un problème de Cauchy ait plusieurs solutions.

Exemple *La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3|y|^{2/3}$. La fonction $x \mapsto x^3$ est également une solution sur $\mathbb{R}$, et le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet donc au moins deux solutions.

Voici cependant une réponse satisfaisante, qui porte le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz. Sous certaines hypothèses relativement faibles sur la fonction F, un problème de Cauchy admet une unique solution localement, c'est à dire sur un intervalle I contenant x0. Attention. On n'a, en général, aucune information sur l'intervalle I d'existence de la solution. On se contente d'un énoncé pour les équations différentielles d'ordre 1, mais ce résultat est très général. On fait une hypothèse sur la régularité de F un peu plus forte que nécessaire pour simplifier les choses.

> **Proposition** *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $U \times \mathcal{D}$, où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit aussi $x_0 \in U$ et $y_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy*
>
> (P) $$\begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$
>
> *Si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathcal{D}$, alors il existe un intervalle $I \subset U$ contenant x_0 et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I solution de (P). De plus si (J, y_1) est une autre solution de (P), avec $x_0 \in J$, alors $y_1(x) = y(x)$ pour tout $x \in I \cap J$.*

__Remarque__ :Ce théorème peut aussi s'énoncer de la manière suivante : sous les hypothèses précédentes, le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale.

Question *Pourquoi le Théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique-t-il pas dans le cas de l'exemple précédent ?*

Dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, on a vu que $F(x, y) = -a(x)y + f(x)$. Lorsque a et f sont continues sur U, la fonction F est continue sur $U \times \mathbb{R}$, et est dérivable par rapport à y avec $\partial_y F(x, y) = -a(x)$. En particulier $\partial_y F$ est continue sur $U \times \mathbb{R}$, et le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour $x_0 \in U$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il existe un intervalle $I \subset U$ contenant x_0 et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui est l'unique solution sur I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -a(x)y + f(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Pour ce type d'équations, on a déjà obtenu bien mieux : on connaît toutes les solutions de l'équation, et il est très facile de vérifier que le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution : c'est la fonction de l'ensemble $\mathcal{S}$ correspondant à $\alpha = y_0$. On sait d'ailleurs aussi que l'on a $I = U$.

Question *Quel résultat déjà évoqué retrouve-t-on pour $y_0 = 0$?*

Autrement dit, le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas d'une grande utilité dans le cas où l'on sait déterminer explicitement l'ensemble des solutions. Mais, rappelons-le, cela est extrêmement rare.

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

Schéma d'Euler : Equations différentielles

Il est maintenant bien clair qu'en général, on ne peut pas écrire les solutions d'une équation différentielle à l'aide de fonctions connues ou même d'intégrales de telles fonctions. Dans la pratique, il faut être capable de calculer des solutions approchées d'une équation différentielle.
Il existe de nombreuses méthodes pour ce faire, certaines extremement performantes, mais nous nous contenterons de décrire la plus simple.

Soit donc $F : U \times D \to R$ une fonction vérifiant les conditions du Théorème de Cauchy-Lipschitz, et $(x_0, y_0) \in U \times D$ un point. On cherche à déterminer une solution approchée du problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + a]$. La méthode d'Euler consiste à découper l'intervalle en N sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $j \in \{0, \dots N - 1\}$, et à approcher la courbe représentative de la solution y sur $[x_j, x_{j+1}]$ par sa tangente en x_j. Autrement dit, on veut poser

$$y_{app}(x) = y'(x_j)(x - x_j) + y(x_j), \text{ pour } x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Evidemment, cette formule n'a pas d'intérêt : on ne sait pas calculer $y(x_j)$ et $y'(x_j)$. On travaille donc par récurrence : on pose d'abord, pour $x \in [x_0, x_1]$,

$$y_{app}(x) = z_0(x - x_0) + y_0.$$

On pose alors $y_1 = y_{app}(x_1) = (x_1 - x_0)F(x_0, y_0) + y_0$, et on recommence. A l'étape j, on pose, pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$\begin{cases} y_j = y_{app}(x_j) = (x_j - x_{j-1})F(x_{j-1}, y_{j-1}) + y_{j-1} \\ y_{app}(x) = F(x_j, y_j)(x_j - x_{j+1}) + y_j. \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction y_{app} affine par morceaux, dont la courbe représentative est relativement proche de la vraie solution y du problème de Cauchy. La Figure 6.6 ci-dessous donne la représentation graphique de y_{app} et de y pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, et on a vu comment le montrer, la vraie solution est $y(x) = e^x - 1$. On a utilisé le schéma d'Euler sur l'intervalle $[0,1]$, en découpant cet intervalle en $N = 2, 4$ et 20 sous-intervalles de même longueur. Il semble sur ce cas que l'approximation est d'autant meilleure que le nombre N de sous intervalle est grand, ou, ce qui revient au même, que le pas, c'est-à-dire la longueur de chaque sous intervalle, soit petit. On donne pour finir un résultat qui

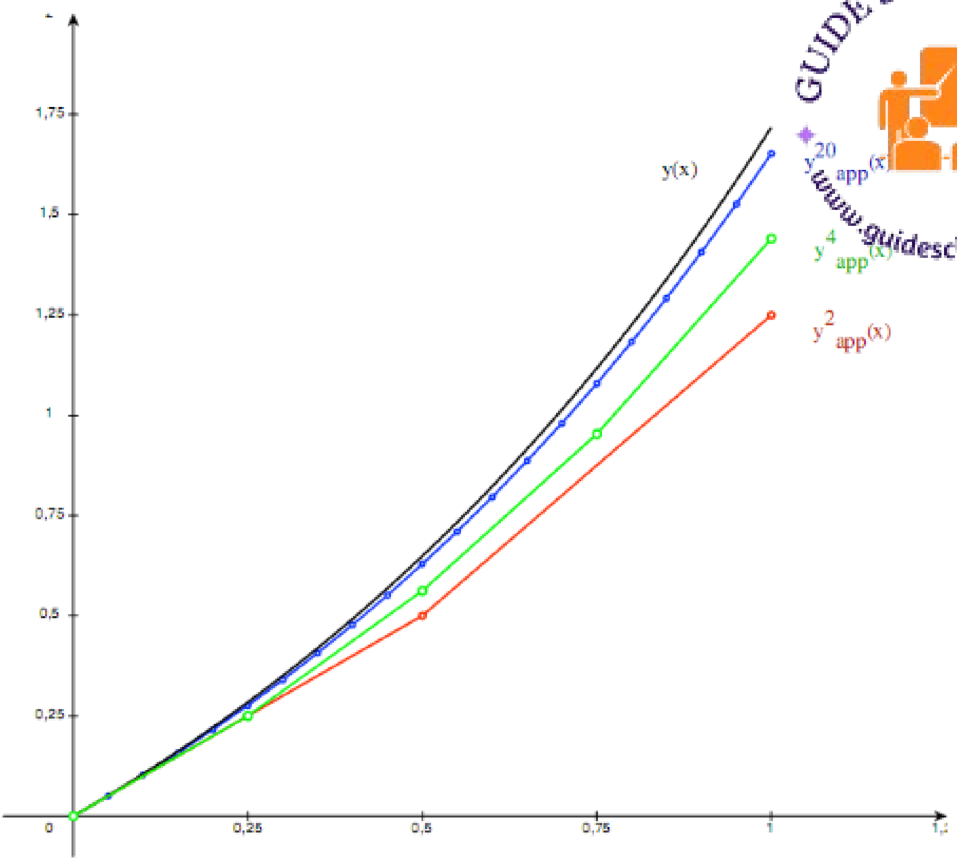

Figure – Méthode d'Euler : comparaison entre solution approchée et vraie solution